Zuily, Éléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles, p. 152

Equation de Schrodinger

Théorème : Soit $g \in S'(\mathbb{R}^n)$. Il existe une unique solution $u = (u_t)_{t\in\mathbb{R}} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, S'(\mathbb{R}^n))$ au problème $\begin{cases} \partial_t u - i\Delta u = 0 & \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n) \ (*) . \\ u_0 = g \end{cases}$

Démonstration :

• Existence : On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u_t = \bar{\mathcal{F}}(e^{-it\|\cdot\|^2}\mathcal{F}g)$, ce qui a un sens, car $g \in S'(\mathbb{R}^n)$, donc $\mathcal{F}g \in S'(\mathbb{R}^n)$, donc $e^{-it\|\cdot\|^2}\mathcal{F}g \in S'(\mathbb{R}^n)$.

De plus, pour $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ et $t \in \mathbb{R}$, on a $\langle u_t, \varphi\rangle = \langle \bar{\mathcal{F}}(e^{-it\|\cdot\|^2}\mathcal{F}g), \varphi\rangle$

$$= \langle \mathcal{F}g, e^{-it\|\cdot\|^2}\bar{\mathcal{F}}\varphi\rangle$$

La fonction $\begin{array}{rcl}\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (t,x) & \longmapsto & e^{-it\|x\|^2}\bar{\mathcal{F}}\varphi(x)\end{array}$ étant $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, l'application $t \mapsto u_t$ est dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, S'(\mathbb{R}^n))$, qui s'injecte dans $S'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ par $\langle u, \psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \langle u_t, \psi(t,\cdot)\rangle\, dt$, pour $\psi \in S(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$. Soit un tel ψ. On a :

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial t} - i\Delta u, \psi\right\rangle = -\left\langle u, \frac{\partial \psi}{\partial t} + i\Delta\psi\right\rangle$$

$$= -\int_{\mathbb{R}} \left\langle u_t, \frac{\partial\psi}{\partial t}(t,\cdot) + i\Delta\psi(t,\cdot)\right\rangle dt$$

$$= -\int_{\mathbb{R}} \left\langle \mathcal{F}u_t, \bar{\mathcal{F}}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}(t,\cdot) + i\Delta\psi(t,\cdot)\right)\right\rangle dt$$

$$= -\int_{\mathbb{R}} \left\langle e^{-it\|\cdot\|^2}\mathcal{F}g, \left(\frac{\partial}{\partial t} - i\|\cdot\|^2\right)\bar{\mathcal{F}}\psi(t,\cdot)\right\rangle dt$$

Or, $\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-it\|\xi\|^2}\bar{\mathcal{F}}\psi(t,\xi)\right) = \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - i\|\xi\|^2\right)\bar{\mathcal{F}}\psi(t,\xi)\right] e^{-it\|\xi\|^2}$,

donc $\left\langle \frac{\partial u}{\partial t} - i\Delta u, \psi\right\rangle = -\int_{\mathbb{R}} \left\langle \mathcal{F}g, \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-it\|\cdot\|^2}\bar{\mathcal{F}}\psi(t,\cdot)\right)\right\rangle dt$

$$= -\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial t}\langle \mathcal{F}g, e^{-it\|\cdot\|^2}\bar{\mathcal{F}}\psi(t,\cdot)\rangle\, dt = 0,$$

car $\mathcal{F}\psi(t,\cdot) \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} 0$. Ceci achève la preuve de l'existence.

• Unicité : Soit $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, S'(\mathbb{R}^n))$ la différence de deux solutions de $(*)$.

On a $\begin{cases} \partial_t u - i\Delta u = 0 \\ u_0 = 0 \end{cases}$. On va montrer que u est nulle.

Soit $\psi \in S(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$. On a $0 = \langle \partial_t u - i\Delta u, \psi \rangle = -\langle u, (\partial_t + i\Delta)\psi \rangle$

$$= -\int_{\mathbb{R}} \langle u_t, (\partial_t + i\Delta)\psi \rangle \, dt .$$

Or $\frac{d}{dt} \langle u_t, \psi(t,\cdot) \rangle = \langle \frac{du_t}{dt}, \psi(t,\cdot) \rangle + \langle u_t, \partial_t \psi(t,\cdot) \rangle$,

donc $$0 = \underbrace{-\int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dt} \langle u_t, \psi(t,\cdot) \rangle dt}_{= 0 \text{ car } \psi(t,\cdot) \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} 0} + \int_{\mathbb{R}} \left[\langle \frac{du_t}{dt}, \psi(t,\cdot) \rangle - i \langle u_t, \Delta \psi(t,\cdot) \rangle \right] dt$$

donc $$\int_{\mathbb{R}} \left[\langle \frac{du_t}{dt}, \psi(t,\cdot) \rangle - i \langle u_t, \Delta\psi(t,\cdot) \rangle \right] dt = 0$$

De plus, pour tout $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, on a $$\langle \mathcal{F}\left(\frac{du_t}{dt}\right), \varphi \rangle = \langle \frac{du_t}{dt}, \mathcal{F}\varphi \rangle$$

$$= \frac{d}{dt} \langle u_t, \mathcal{F}\varphi \rangle$$

$$= \frac{d}{dt} \langle \mathcal{F}u_t, \varphi \rangle$$

$$= \langle \frac{d}{dt}(\mathcal{F}u_t), \varphi \rangle$$

donc $$\int_{\mathbb{R}} \left[\langle \frac{d}{dt}(\mathcal{F}u_t), \bar{\mathcal{F}}\psi(t,\cdot) \rangle + i \langle \mathcal{F}u_t, \|\cdot\|^2 \bar{\mathcal{F}}\psi(t,\cdot) \rangle \right] dt = 0.$$

Ceci étant vrai pour tout $\psi \in S(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$, on va pouvoir l'appliquer aux éléments ψ tels que $\bar{\mathcal{F}}\psi(t,\xi) = e^{it\|\xi\|^2} \varphi(\xi)\chi(t)$, avec $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ et $\chi \in S(\mathbb{R})$.

Pour tous $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, $\chi \in S(\mathbb{R})$, on a $$\int_{\mathbb{R}} \left[\langle \frac{d}{dt}(\mathcal{F}u_t), e^{it\|\cdot\|^2}\varphi \rangle + i \langle \mathcal{F}u_t, \|\cdot\|^2 e^{it\|\cdot\|^2}\varphi \rangle \right] \chi(t)\, dt = 0,$$

ce qui donne, pour tous $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ et $t \in \mathbb{R}$,

$$\langle \frac{d}{dt}(\mathcal{F}u_t), e^{it\|\cdot\|^2}\varphi \rangle + i \langle \mathcal{F}u_t, \|\cdot\|^2 e^{it\|\cdot\|^2}\varphi \rangle = 0$$

Le membre de gauche étant égal à $\frac{d}{dt}\langle \mathcal{F}u_t , e^{it\|\cdot\|^2}\varphi\rangle$, la fonction

$$t \longmapsto \langle \mathcal{F}u_t, e^{it\|\cdot\|^2}\varphi\rangle$$ est constante, égale à $\langle \mathcal{F}u_0 , \varphi\rangle = 0$, car $u_0 = 0$.

Soient alors $t \in \mathbb{R}$ et $\theta \in S(\mathbb{R}^n)$ quelconques.

On a $\langle \mathcal{F}u_t, \theta\rangle = \langle \mathcal{F}u_t, e^{it\|\cdot\|^2}\underbrace{(e^{-it\|\cdot\|^2}\theta)}_{\in S(\mathbb{R}^n)}\rangle = 0$, donc $\mathcal{F}u_t = 0$

dans $S'(\mathbb{R}^n)$, ce qui donne $u_t = 0$ dans $S'(\mathbb{R}^n)$ et ce pour tout $t \in \mathbb{R}$.

On a donc $u = 0$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, S'(\mathbb{R}^n))$, ce qui achève la preuve de l'unicité.